Załącznik 3 do Regulaminu

Zadania przygotowawcze do konkursu

o tytuł Najlepszego Matematyka Powiatu Bocheńskiego

rok szkolny 2018/2019

28 stycznia 2019

Kategoria I – poziom podstawowy

1. Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej *n* wartość wyrażenia $\frac{n^3-n}{6}$ jest liczbą naturalną.
2. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ wiedząc ,że $a+b=5\ i\ ab=2$.
3. Wyznacz wszystkie naturalne wartości *m*, dla których podane liczby są naturalne:
   $\frac{6}{m}+3 \quad i \quad \frac{12}{m}+m.$
4. Wykaż ,że liczba $5^{2012}+5^{2013}+5^{2014}$ jest podzielna przez 31.
5. Znajdź liczbę dwucyfrową równą podwojonemu iloczynowi swoich cyfr.
6. Udowodnij równość:$\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}=2.$
7. Ile litrów octu 5% i ile litrów octu 25% należy zmieszać aby otrzymać 2 litry octu 10%.
8. Uzasadnij równość: $3^{\log 2}-2^{\log 3}=0.$
9. Cztery punkty leżące na okręgu oznaczono kolejno jako *A,B,C,D*. Wykaż, że jeśli *AC* i *BD* są średnicami okręgu to czworokąt *ABCD* jest prostokątem.
10. Wysokość i środkowa trójkąta *ABC* wychodzące z wierzchołka *A* dzielą kąt *CAB* na trzy równe katy. Wyznacz miarę kata *CAB*.
11. Dany jest trapez prostokątny .Wykaż ,że różnica kwadratów długości jego przekątnych jest równa różnicy kwadratów długości jego podstaw.
12. Wykaż, że jeśli w trójkącie środkowa jest równa połowie długości boku, do którego została poprowadzona, to ten trójkąt jest prostokątny.
13. Pan Karol sprzedawał truskawki przez 3 dni. Drugiego dnia podniósł cenę o p%. Trzeciego dnia, aby sprzedać cały towar, obniżył cenę o p% w stosunku do ceny z dnia poprzedniego. Oblicz, o ile procent podniósł cenę, wiedząc, że trzeciego dnia truskawki kosztowały o 9% mniej niż poprzedniego dnia.
14. Wykaż, że liczba $2\underbrace{9\ldots9}_{n}4$ jest podzielna przez 3.
15. Zbiór A jest zbiorem rozwiązań nierówności $|x-2|+1\leq 3,$ a zbiór B – zbiorem rozwiązań nierówności $|6-2x|-\ 2\ >2.$ Podaj najmniejszą liczbę nieparzystą należącą do zbioru A - B.

Kategoria I – poziom rozszerzony

1. Rozwiąż w liczbach całkowitych równanie : $a\cdot b + a = b^2 + b + 3$.
2. Podaj wszystkie pary liczb całkowitych (x, y) spełniających równanie $(x + y - 2)(x - y - 2) - 5 = 0$.
3. Iloczyn dwóch liczb naturalnych jest równy 2700, a ich największy wspólny dzielnik to 6. Jakie to liczby?
4. Suma dwóch liczb naturalnych jest równa 504, a największy wspólny dzielnik tych liczb to 36. Wyznacz te liczby.
5. Liczby rzeczywiste a, b, c spełniają następujące warunki : $|a| \geq |b + c|$; $|b| \geq |a + c|$ oraz $|c| \geq |a + b|$. Udowodnij, że $a = b = c$.
6. Wykaż, że liczba $p^2 - 25$ jest podzielna przez 24, wiedząc, że liczba p jest liczbą pierwszą i $p \geq 5$.
7. Wykaż, że liczba $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$ jest całkowita.
8. Oblicz $\log_{\sqrt{ab}}\left(\frac{a}{b}\right)$ wiedząc, że $\log_a b = 2$.
9. Wykaż, że jeśli $a, b \rangle 0$, to $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a + b}$.
10. Liczbą doskonałą nazywamy liczbę naturalną równą sumie wszystkich swoich dzielników naturalnych mniejszych od n. Znajdź wszystkie liczby doskonałe ze zbioru $A = \{x : x \in C \wedge ||x + 3| - 5| \leq 10 \wedge |x + 1| > 6\}$.
11. Wykaż, że w dowolnym czworokącie suma długości odcinków łączących środki przeciwległych boków nie przekracza połowy obwodu tego czworokąta.
12. Wykaż, że $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{8}$.
13. Wykaż, że jeżeli w trójkącie ABC: $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|CA| = b$ oraz $|\angle ABC| = 2|\angle BAC|$, to: $b^2 = a(a + c)$.
14. Na płaszczyźnie dane są punkty A i B, przy czym $|AB| = 3$. Wykaż, że istnieje dokładnie osiem punktów, które są wierzchołkami trójkąta prostokątnego o boku AB i polu 1.
15. Dany jest prostokąt ABCD taki, że $|AB| = 3|BC|$. Na boku CD obrano punkty E i F takie, że $|CE| = |EF| = |FD|$. Proste AE i BF przecinają się w punkcie M. Wykaż, że $P_{\Delta ABM} = 9P_{\Delta CEM}$.

Kategoria II – poziom podstawowy

1. Wyznacz wszystkie wartości b, dla których funkcja liniowa $f(x)=(|b|-3)x+2b-8$ jest rosnąca i równocześnie wykres funkcji f przecina oś OY poniżej punktu $P=(0,2)$.
2. Wykres funkcji liniowych $f(x)=\frac{1}{2}ax-b$ oraz $g(x)=-\frac{1}{2}bx+a$, gdzie $a\neq -b$ przecinają oś OX w tym samym punkcie. Wyznacz odciętą tego punktu.
3. Wykaż, że jeżeli funkcja kwadratowa $f(x)=x^2+(b-4)x+c$ ma dwa różne miejsca zerowe i dla argumentu c przyjmuje wartość najmniejszą, to $c\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.
4. Wykaż, że jeżeli zbiorem wartości funkcji $f(x)=-x^2+2kx-3$ jest przedział $(-\infty,1\rangle$, to $k\in\{-2,2\}$.
5. Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej są liczby (–6) oraz 1. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{3\cdot f(94)}{f(-24)}$.
6. Dana jest funkcja kwadratowa $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$. Wyznacz wszystkie wartości a, b, c, wiedząc, że funkcja f jest rosnąca w $(-\infty,-1\rangle$ i malejąca w $\langle -1,+\infty)$, jednym z jej miejsc zerowych jest (-3), a w przedziale $\langle 0,2\rangle$ największą wartością funkcji jest liczba 6.
7. Miejsca zerowe dwóch funkcji liniowych są liczbami przeciwnymi. Wykresy tych funkcji przecinają się w punkcie $P=(2,4)$ i wraz z osią OX ograniczają trójkąt polu 12. Wyznacz wzór tych funkcji.
8. Wyznacz dziedzinę funkcji: $f(x)=\sqrt{x^2+x-42}+\frac{x-1}{\sqrt{64-x^2}}$.
9. W trójkącie prostokątnym dwusieczna kąta ostrego dzieli przeciwległy bok w stosunku 2:3. Oblicz stosunek długości promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt do długości promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.
10. Wyznacz wysokość trapezu, którego podstawy mają długość 2 cm i 30 cm, a ramiona 25 cm i 17 cm.
11. Pole rombu jest równe $60\,\mathrm{cm}^2$. Dłuższa przekątna rombu podzieliła kąt ostry rombu na takie dwa kąty o mierze α, że $tg\alpha=\frac{8}{15}$ .Oblicz długość boku rombu.
12. W trójkącie ABC środkowe poprowadzone z wierzchołków A i B są do siebie prostopadłe. Wykaż, że jeżeli $|BC|=a$ i $|AC|=b$, to $|AB|=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}$.
13. W trójkącie prostokątnym przyprostokątna przeciwległa kątowi α ma długość a, druga przyprostokątna ma długość b, a przeciwprostokątna c. Wiadomo, że $\sin\alpha=\frac{2}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{b^2+c^2}{6ac}$.
14. Podstawy trapezu ABCD mają długość |AB|=10 cm, |DC|=6 cm. Punkt K jest środkiem boku AD, a punkt L jest środkiem boku BC. Przekątna AC przecina odcinek KL w punkcie M, a przekątna BD przecina odcinek KL w punkcie N. Oblicz długość odcinków KM, MN, LN.

Kategoria II – poziom rozszerzony

1. Przez środek boku trójkąta równobocznego ABC poprowadzono prostą tworzącą z tym bokiem kąt ostry α. Wyraź stosunek pól figur, na jakie ta prosta dzieli trójkąt ABC jako funkcję kąta α.
2. Niech x_1, x_2 będą pierwiastkami równania $x^2+x-1=0$ i niech $n=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$. Dla jakich wartości parametru m nierówność $\frac{x^2+(m+n)x+m}{x^2+x-2n} \leq 1$ jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą x?
3. Rozwiąż nierówność: $\sqrt{(x+2)^2-8x}+|3-x|<3x-1$.
4. Wykaż, że jeżeli na czworokącie można opisać okrąg, to pole S tego czworokąta wyraża się wzorem: $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, gdzie a, b, c, d są długościami boków czworokąta i $2p=a+b+c+d$.
5. Wyznacz wszystkie liczby naturalne x, dla których liczba $y=\sqrt{x^2+4}$ jest liczbą całkowitą.
6. Wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych spełniających równanie: $xy-2y=7$.
7. Wykaż, że jeśli funkcja kwadratowa $f(x)=x^2+bx+c$ ma miejsca zerowe, to funkcja kwadratowa określona wzorem $g(x)=x^2+\left(m-\frac{1}{m}\right)bx+(m-\frac{1}{m})^2c$, gdzie $m \neq 0$ również ma miejsca zerowe.
8. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej m, pierwiastkami równania $x^2+mx+2m-4=0$ z niewiadomą x są liczby całkowite.
9. Bezwzględna wartość różnicy dwóch liczb jest równa 2. Suma kwadratów tych liczb jest o 26 większa od ich sumy. Wyznacz te liczby.
10. Wyznacz stosunek długości boków równoległoboku wiedząc, że stosunek kwadratów długości jego przekątnych jest równy $\frac{19}{7}$, natomiast kąt ostry tego równoległoboku ma miarę 60°.
11. Wykaż, że jeżeli współczynniki a, b, c równania $ax^2+bx+c=0$ spełniają warunek $2b^2=9ac$ i $a \neq 0$, to stosunek pierwiastków tego równania jest równy 1:2.
12. Wykaż, że długość dwusiecznej kąta prostego w trójkącie prostokątnym jest równa $\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$, gdzie a, b są długościami przyprostokątnych tego trójkąta.
13. Wielomian $W(x)=2x^3+(p^2-1)x^2+(p+2)x+q-p$ jest podzielny przez dwumian $x+1$, a przy dzieleniu przez $x-2$ otrzymujemy resztę 27. Wykaż, że istnieje tylko jedna para liczb p i q, dla której wielomian $W(x)$ można przedstawić w postaci iloczynu trzech czynników pierwszego stopnia. Podaj tę parę liczb oraz postać iloczynową wielomianu.
14. Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x nierówność $x^4-x^2+4x+5 \geq 0$ jest prawdziwa.
15. Dany jest trójkąt ABC. Na boku AB znajduje się punkt E. Dorysowano dwa okręgi. Pierwszy okrąg przechodzi przez punkty A i E, a drugi przez punkty B i E. Okręgi przecięły się również w punkcie G. Pierwszy okrąg przeciął bok AC w punkcie D, a drugi okrąg – bok BC w punkcie F. Wykaż, że na czworokącie CDGF można opisać okrąg.